بسم ا... الرحمن الرحيم

# منطق فازی

ارشام برومند سعید
بخش ریاضی
دانشگاه شهید باهنر کرمان
e-mail: arsham@mail.uk.ac.ir

➢منطق فازی برای مدلسازی استدلالات نادقیق با عمل بر روی مفاهیم نا دقیق است. منطق فازی به دنبال فرموله کردن قواعدی برای استنتاج تقریبی است. در این نوشتار قصد براین است با مروری بر منطق فازی و سیر تکاملی منطق های چند ارزشی که توسط لوکاسیویچ (۱۹۲۰) شروع شد تا به امروز بپردازیم. یکی از روشهای مطالعه و بررسی منطق، مطالعه منطق از دیدگاه جبری است که اولین بار توسط لیندمبام و تارسکی مطرح شد، با استفاده از دیدگاه جبری می توان تمامی قضایا و فرمولهای منطقی را به جبر متناظر با آن ترجمه نمود و سپس با استفاده از جبر به اثبات قضایا و خواص منطق پرداخت که اثبات تمامیت منطق یکی از این کاربردها می باشد. لذا با در نظر گرفتن فرمولهای زبان منطقی به عنوان عبارات جبری دیدگاههای جبری منطق فازی را بررسی کنیم.

# منطق سه ارزشی

در سال ۱۹۲۰ توسط لوکاسیویچ ارزش سوم برای گزاره ها معرفی شد و او یک ارزش میانی را به ارزشهای کلاسیک ۰ و ۱ اضافه نمود و آنرا بعنوان امکان یا عدم قطعیت تعبیر نمود.

سپس رابط های گزاره ای را تعمیم داد که جدول ارزشدهی آنها بصورت زیر می باشد.

| → | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
|---|---|---|---|
| ٠ | ١ | ١ | ١ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | ١ | ١ |
| ١ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| ٠ | ١ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| ١ | ٠ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٧ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
| ٠ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
| ١ | ١ | ١ | ١ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٨ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| $\frac{1}{2}$ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| ١ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\leftrightarrow$ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |
| ٠ | ١ | $\frac{1}{2}$ | ٠ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | ١ | $\frac{1}{2}$ |
| ١ | ٠ | $\frac{1}{2}$ | ١ |

- این ارزشدهی به بحث ها و تناقضاتی با منطق دو ارزشی منجر گردید بعنوان مثال در منطق دو ارزشی گزاره $\alpha \wedge \neg\alpha$ همواره غلط و گزاره $\alpha \vee \neg\alpha$ همواره درست می باشد که این امر در این ارزشدهی برای حالتی که $\alpha = \frac{1}{2}$ برقرار نمی باشد. لذا منطق سه ارزشی میتواند بعنوان مجموعه ای از گزاره ها تعبیر شود که حوادث را بیان می کند ولی تشکیل یک جبر غیر کلاسیک می دهد.

- دستگاه حساب گزاره ای سه ارزشی با حساب کلاسیک گزارهها تفاوت دارد زیرا با در نظر گرفتن $p \equiv \neg p$ درستی عبارت فوق می تواند بوسیله انتخاب هر ارزشدهی که به گزاره $p$ ارزش $\frac{1}{2}$ را نسبت می دهد ملاحظه گردد.
- پارادوکس راسل " مجموعه تمام مجموعه هایی که عضو خودشان نیستند" در این منطق دیگر یک تناقض نیست!

- مجموعه راسل بصورت زیر تعریف می شود

$$Z = \{x : x \in x\}$$

و پارادکس حاصل از آن $Z \in Z \equiv Z \notin Z$ یک جایگزینی از $p \equiv \neg p$ می باشد و لذا یک تناقض نمی باشد.

- زاده در سال ۱۹۶۵ مجموعه فازی را تعریف نمود. مجموعه های فازی وسیله ای برای مدلسازی محمولات نا دقیق ظاهر شده در زبانهای طبیعی هستند.
- منطق فازی به دنبال فرموله کردن چند قاعده برای استنتاج تقریبی است به این منظور کوشش دارد که مورد استفاده زبانی بعضی از قیدها را که در مفاهیم نادقیق بکار میروند صوری کند. این قیدها مانند "خیلی" "کم وبیش" و غیره هستند.

- منطق فازی یک ساختمان معنایی دارد که اجازه ابهام را در محمولات قیدهای آنها و ارزشهای منطقی می دهد

- بعنوان مثال اگر A عددی کوچک باشد و  AوB تقریبا مساوی باشند می توان نتیجه گرفت B کم وبیش عددی کوچک است.

- منطق فازی بر اساس یک منطق بی نهایت ارزشی با رابط های $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \equiv$ و ارزشهایی در $[0,1]$ تشکیل می شود.اصل اولیه آن مبتنی بر یکی گرفتن محمولات با زیر مجموعه های فازی یک مجموعه داده شده و یکی گرفتن ارزشهای منطقی با زیر مجموعه های فازی مجموعه ارزشهای منطق پایه یعنی $[0,1]$ است.

منطق پایه شامل رابطهای دوتايي $\circ$ و $\Rightarrow$ و ثابت $\bar{0}$ است که در اصول زیر صدق می کند

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \omega) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \omega))$

(A2) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \omega$

(A3) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(A4) $(\varphi \circ (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \circ (\psi \Rightarrow \varphi))$

(A5a) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \omega)) \Rightarrow ((\varphi \circ \psi) \Rightarrow \omega)$

(A5b) $((\varphi \circ \psi) \Rightarrow \omega) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \omega))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \omega)) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega)$

(A7) $\overline{0} \Rightarrow \omega$

یکی از راههای مطالعه یک منطق بررسی آن از دیدگاه جبری می باشد. می توان به منطق یک ساختار جبری وابسته نمود و با استفاده از روابط جبری به خواص منطق رسید.

در ادامه قصد براین است که منطق پایه از دیدگاه جبری مطالعه شود و چون می توان از دیدگاه جبری خیلی از خواص مهم جبرهای وابسته به منطق های چند ارزشی از جمله منطق پایه را بدست آورد و در نتیجه می توانیم با استفاده از خواص بدست آمده از دیدگاه جبری خواص منطقی را بدست آوریم.

- در سال ۱۹۹۸ پروفسور هایک مفهوم BL-جبر را برای اثبات تمامیت منطق پایه (Basic Logic) تعریف نمود.

یک BL-جبر ساختار $(A, \vee, \wedge, \Rightarrow, *, 0, 1)$ است که:

۱- $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ یک مشبکه کراندار است.

۲- $(A, *, 1)$ یک مونوئید جابجایی است.

۳- اعمال $*$ و $\Rightarrow$ یک زوج الحاقی باشند یعنی $c \leq a \Rightarrow b$ اگر و فقط اگر $a * c \leq b$ .

۴- $a \wedge b = a * (a \Rightarrow b)$ .

۵- $(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$ .

خواص این ساختار توسط محققین زیادی مطالعه و بررسی شد از جمله مفهوم فیلتر را تعریف نمودند و خواص آنرا بدست آوردند و BL-جبرهای خارج قسمتی مطالعه شد. سیستم استنتاجی توسط ترونن تعریف شد و نیز ثابت شد که با مفهوم فیلتر یکی است و بعد از آن فیلترهای دیگری نیز تعریف شد ( هاوشکی، برومند سعید و اسلامی) و توسط آنها خواص مهمی از این ساختار بررسی شد.

تعمیم های زیادی نیز از این ساختار معرفی شده است.

- نتیجه گیری و پیشنهادات

ابتدا به معرفی منطقهای چند ارزشی پرداختیم و سپس جبر حاصل از منطق های فازی را معرفی نمودیم.

می توان موضوعات ومطالب زیر را برای تحقیقات پیشنهاد نمود

۱- مطالعه خواص ساختار BL-جبر

۲- مطالعه خواص ساختار جبری تعمیم های BL-جبر و پیدا کردن خواص منطقی برای این تعمیم ها

۳- پیدا نمودن یک دسته بندی برای BL-جبر و در نتیجه برای منطق آن.

# مراجع و منابع


۱-گرزگرز مالینوفسکی، منطقهای چند ارزشی، ترجمه اسفندیار اسلامی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۶.

۲- W. A. Dudek, Algebras inspired by the equivalential calculus, Italian J. pure and Appl. Math. ۹ (۲۰۰۱), ۱۳۹-۱۴۸.

۳- P. H`ajek, Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ۱۹۹۸.

۴- H. Rasiowa: An algebraic approach to non-classical logics, North-Holland, Amsterdam ۱۹۷۴.

۵- E. Turunen, Mathematics behind Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, ۱۹۹۹.

با تشکر از توجه شما